

Konu: **Bilim**

Yazı: **42**

Diferansiyel Hesap

Doç. Dr. Haluk Berkmen

Fizik bilimi matematik sayesinde gelişmiştir. Fakat matematik bilimi sonsuz ve sınırsız sayılar söz konusu olduğunda çelişkili sonuçlar vermektedir. Örneğin 0/0 belirsizdir ve herhangi bir A sayısı sifira bölündüğünde sonuç sonsuz büyük bir değer olur. Bu durum karşısında sifira çok yakın fakat sifirdan farklı olan mikro değerleri kabullenmek gerekir. Yani, sonsuz küçük kavramı yaklaşilan fakat asla erişilemeyen bir limit değer olmaktadır.

Isaac Newton (1643 – 1727) fiziksel bir büyüklüğün sonsuz küçük bölümüne **Fluxion** adını vermiş ve *o* harfiyle belirtmiştir. Bu kavramı hızın değişimini hesaplayabilmek için ileri sürmüştür. Hareket halindeki nesnelere daima sabit hızlarla hareket etmezler. Çoğu zaman ivmeli hareket ederler. İvme, hızın belli bir zaman aralığında değişimi olarak tanımlanır. Newton bu zaman aralığını sifira yakın olarak değişimi ivme $a = v'$ olarak göstermiştir.

Aynı dönemde yaşamış olan **Gottfried Leibniz** (1646 – 1716) sifira yakın küçük değişimleri *d* harfiyle gösterip ivmeyi bugün dahi kullandığımız notasyonla $a = dv/dt$ olarak belirtmiştir. Buradaki *d* harfi **difference** "fark" sözünün baş harfinden alıntıdır. Böylece küçük farklar hesabına "**Diferansiyel Hesap**" denmiştir. Her ne kadar iki yaklaşım da aynı sonuçları verse de, daha basit ve anlaşılır olan Leibniz notasyonu olup, 1684 yılında almanca bir dergide yayınlanmıştır. Newton ise kendi yaklaşımını Leibniz'den 3 yıl sonra 1687'de yayınlamıştır. Şu halde diferansiyel hesabın mucidi Leibniz sayılmalıdır. Fakat, bu duruma rağmen Newton, kendi görüşlerini uzun yıllar boyunca mektuplaştığı Leibniz'e çok önceden bildirdiği gerekçesiyle Leibniz'i düşünce hırsızlığı ile suçlamış, diferansiyel hesabın asıl mucidinin kim olduğu tartışması yıllarca sürmüştür.

Günümüzde ivme $a = \text{Limit } dt \rightarrow 0 (dv/dt)$ şeklinde "zaman aralığı *dt*'nin sifira gittiği limitte" tanımlanmaktadır. Fakat bu sadece sonsuzluktan kaçmak için ve sonsuzluk sorununu göz ardı etmek için kabullenilmiş bir kabuldür. Çünkü gerçek sifira ulaşıldığında ivme sonsuz olur. Öyleyse tüm değişkenler için bir minimum değer olması gerekir. Zaman ve mekân için minimum değerler Planck Planck uzaklığı ve Planck zamanıdır. Planck zamanı bir fotonun Planck uzaklığı kadar yol alması için geçen zamandır. Bunlar yaklaşık olarak:

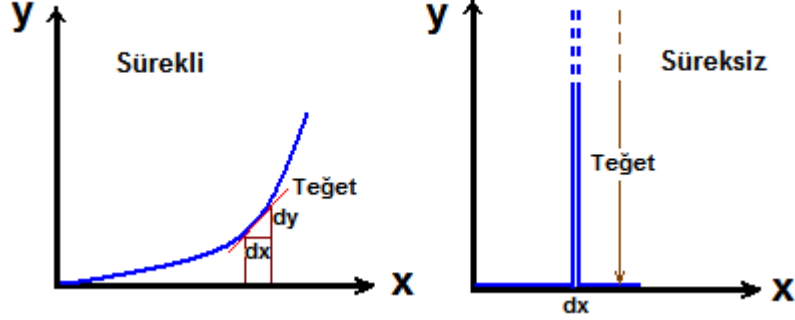
$$T_p = 5,4 \times 10^{-44} \text{ saniye} , L_p = 1,6 \times 10^{-35} \text{ metre.}$$

Her iki değer de Planck sabiti *h*, ışık hızı *c* ve gravitasyon sabiti *G* ile ilgilidir. Bu derece küçük mesafelere ve sürelerle henüz ulaşılabilmemiş değildir. Ama bu iki değer sifira doğru giderken varılabilecek en son limit değerler olarak kabul edilebilir. Bir dalganın hızı $v = f \cdot \lambda$

şeklinde dalganın frekansı (saniyedeki titreşim sayısı) çarpı dalga boyu olduğuna göre, ışık hızı c ve dalga boyu Planck uzunluğu L_p seçilirse, Planck frekansı F_p yaklaşık olarak:

$$F_p = c / L_p = 1,9 \times 10^{43} \text{ 1/saniye}$$

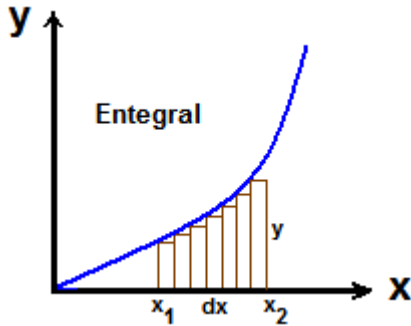
elde edilir. Bunun anlamı da dalga boyu Planck mesafesi olan bir ışık dalgası saniyede yaklaşık olarak 10^{43} kere titreşmelidir. Planck mesafesinde artık süreklilikten söz edilemez. Çünkü bir değişkenin sürekli olması için altta sol grafikteki gibi teğetin y-eksenine paralel olmaması, yani sağdaki teğet gibi sonsuza yakın bir değer almaması gerekir.



En küçük mesafe $dx = L_p$ ise evrende her hareketin süreksiz küçük adımlarla gerçekleştiğini savunabiliriz. Bu görüş Planck tarafından ileri sürülmüş olan enerjinin $E = h.f$ denkleminde uygulanırsa $E_p = 1,95 \times 10^9$ Joule bulunur. Bu değer 56 litre benzin enerjisine, yani bir otomobil deposu benzin enerjisine yaklaşık olarak eşittir.

Kuantum kuramına göre enerji ve momentum süreksiz adımlarla aktarılabilmektedir (Bkz. **20** sayılı **Süreksiz Gerçeklik** başlıklı yazım). Zaten belirsizlik de bu süreksiz değişimlerin sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. Süreksiz hareket kendi üzerine dönüşen **Fraktal** sistemlerde bulunur. Çevremizde gördüğümüz pek çok doğal canlı veya cansız varlık/oluşum *fraktal* yapıdadır. Bir önceki yazıda Fraktal kümelerin Kaotik yapıda olduklarından söz ettim. Şu halde doğadaki karmaşanın (Kaosun) süreksiz adımlarla gerçekleşen değişimlerin sonucunda oluştuğunu söyleyebiliriz (Bkz. **31** sayılı **Doğada Düzen ve Karmaşa** başlıklı yazım).

Diferansiyel hesabın devamını entegral hesabı oluşturur. Entegral sözü "**entegre etmek**" birleştirmek/bütünlemek sözünden türer ve küçük adımlardan oluşan sonlu parçaların toplanması anlamını taşır. Altta grafikte bu çubukların geometrik toplamı görülüyor.



Her bir çubuğun alanı dx çarpı y olduğuna göre, tüm alan x_1 den x_2 ye kadar çubuk alanlarının toplamı olur. Bunu da $y = f(x)$ şeklinde x değişkenine bağlı bir fonksiyonun x_1 den x_2 ye kadar entegrali olur.

$$\text{Alan} = \sum f(x) dx \Rightarrow \int f(x) dx$$

Eğer $f(x) = x$ şeklinde bir doğrunun denklemi ise, alan bir üçgen alanı olan $A = x^2 / 2$ olur. Orijin olan sıfır noktasından x noktasına kadar alan:

$\int x dx = x^2 / 2$ elde edilmiş olur. Burada gene çubukların sıfır enli oldukları ve süreksiz toplamın sürekli bir entegral olarak ifade edilebileceği varsayılmaktadır. Eğer fizik gerçeklik olan doğa ile ilgileniyorsak, süreklilik varsayımını terk etmemizde yarar vardır.