Konu: **Bilim**
Yazı: **16**

Düzen Karmaşa İlişkisi

Doç. Dr. Haluk Berkmen

Fizikçiler uzun yıllar, hatta birkaç yüzyıldır matematik çözümü kolay olan "doğrusal" denklemlerle ilgilendiler. Doğa oluşumlarını ve davranışlarını, kolay tanımlanan geometrik şekillerle ve çözümü kolay olan matematik fonksiyonlarla açıklamaya çalıştılar. Örneğin, bir doğru çizgiyi y = a.x + b denklemi tanımlar. a parametresi doğrunun x ekseni ile yaptığı açıyı ve b parametresi de doğrunun y eksenini kestiği noktayı belirler.

Bu doğru denklemi çözümü kolay olan çizgisel yapıları tanımlar. Fakat y = a. x^2 + b denklemi çizgisel olmayıp, bir x sayısının karesini içerir. Kolay olsun diye a = 1 ve b = 0 alıp y = x^2 denklemini inceleyelim. Bu denklemi kendini tekrarlayan bir yapıya uygulayalım. Yani, y(n) = y(n-1).y(n-1) olsun. Bu ifade ile her yeni adımı hesaplamak için bir önceki adımda elde edilen değer kullanılacaktır. Aralarında çok az fark olan iki sayı ile başlayalım. Bunlardan biri x değeri için 1'den çok az büyük, örneğin x = 1.00005 ve diğeri, x değeri için 1'den çok az küçük, örneğin 0.99995 olsun. Bu iki sayıya yukarıda belirtilen tekrarlı dönüşümü uygulayalım.

x = 1.00005, x.x = x^2 =1.0001, x^2. x^2 = x^4 = 1.0002, x^4. x^4 = x^8 =1.0004, şeklinde işleme devam edersek sayının büyüyüp birkaç adımda **çok büyük sayılara doğru** gideceğini kolayca görebiliriz. Öte yandan x = 0.99995 sayısına aynı işlemi uygularsak,

x = 0.99995, x.x = x^2 =0.9999, x^2. x^2 = x^4 = 0.9998, x^4. x^4 = x^8 =0.9996 şeklinde gittikçe **1 sayısına doğru** yaklaşacağını görürüz. Aralarında 0.0001 (**onbin'de bir**) kadar küçük fark bulunan iki sayı <u>çizgisel olmayan ve kendini tekrarlayan bir işlem sonucunda</u> çok farklı sonuçlar verebiliyor.

Bu örnek basit bir şekilde iki önemli özelliğin etkilerini ortaya koyuyor.
1. Çizgisel olmayan yapıların önemini ve
2. Kendi üzerine dönüşümün (iterasyonun) etkisini.

Lineer (doğrusal) olmayan yapılar, oluşumlar ve olgular doğada her boyutta pek çok yapıda karşımıza çıkıyor. Bu tür doğrusal olmayan denklemlerden türeyen şekillere **Fraktal** adı verilmiştir. Çünkü bu şekillerin boyutu tam sayı olmayıp kesirli bir sayı olmaktadır. Örneğin bir süngeri düşünün. Sünger 3-boyutta yer kaplar ve üç boyutlu gibi görünür. Fakat içindeki deliklerin çokluğundan dolayı kıvrımları çok olan 2-boyutlu bir yüzeye de benzer. Bu bakımdan sünger ne 2-boyutlu bir nesnedir, ne de 3-boyutlu. Süngerin boyutu kesirli olup 2 ile 3 arasındadır.

Fraktal sözü İngilizce "Fractional" (kesirli) sözünden türemiştir ve kesirli boyut sahibi olan nesneleri ve oluşumları tanımlar. Fraktal yapılara doğada pek çok örnek vardır. Örnek olarak gökteki bulutları, ağaçların dal ve yapraklarını, hatta akciğerin içyapısını dahi gösterebiliriz. Hepsinde de kendine benzeyen fakat aynen fotokopi gibi tekrarlanmayan "kendi üzerine dönüşümlü" bir yapı bulunur. Örnekleri "**Kozmos ve Kaos**" başlıklı sesli sunumumda görebilirsiniz.

Çizgisel bir gelişme göstermeyen sistemlerde, çok yakın başlangıç şartları dahi çok farklı sonuçlar verebilirler. İşte Karmaşa kuramında "**Kelebek etkisi**" denen olay budur. Eğer gelişim ve etkileşim çizgisel değilse, bir kelebeğin kanat çırpışı kadar ufak bir fark dahi sonuçta çok büyük farklara yol açabilir.

İklim değişimlerini bilgisayarda programlayan iklim bilimci Edward Lorenz (1917-2008) **tuhaf çekici ve matematik karmaşa** (Kaos) kavramlarını tanımlamıştır. Karmaşa ile düzen arasındaki yakın ilişkiyi görmek için alttaki denklemin değişimine bakalım.

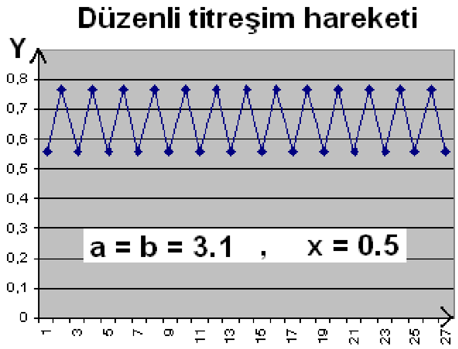
$$Y(x) = ax - bx^2 \qquad Y_{n+1}(x) = Y_n[Y_n(x)]$$

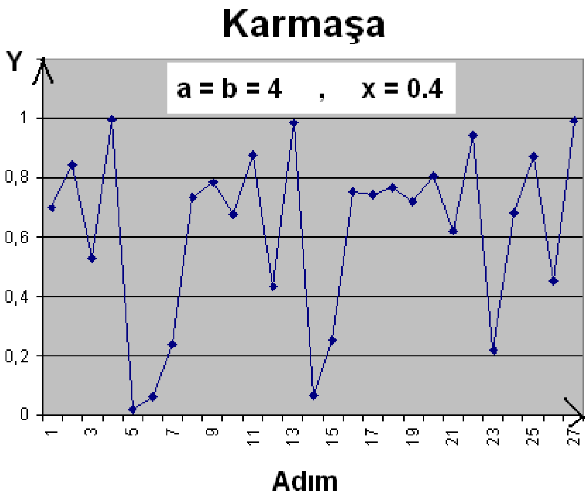
a = b	x	y = a(x-x^2)
3,1	0,5	0,775
3,1	0,775	0,5405625
3,1	0,5405625	0,769899519
3,1	0,769899519	0,549178174
3,1	0,549178174	0,767502672
3,1	0,767502672	0,553171193
3,1	0,553171193	0,766235755
3,1	0,766235755	0,55526742
3,1	0,55526742	0,765531088
3,1	0,765531088	0,556429048
3,1	0,556429048	0,765128864
3,1	0,765128864	0,557090725
3,1	0,557090725	0,764896012
3,1	0,764896012	0,557473318
3,1	0,557473318	0,764760135
3,1	0,764760135	0,55769642
3,1	0,55769642	0,764680482
3,1	0,764680482	**0,557827152**
3,1	0,557827152	**0,764633663**

$$Z_1 = 0.558 \text{ ile } Z_2 = 0.765$$

arasında sürekli titreşir.

a = b = 3,1 olarak seçtiğimizde Y(x) periyodik olarak Z1 ile Z2 arasında sıçrar. Fakat **a = b= 4** alırsak sistemin davranışı aniden karmaşık olur. Altta bu durumu görüntülü grafiklerde görmekteyiz.





Bu örnekten düzen ile karmaşanın ne derece yakın olduklarını görüyoruz. Sistemdeki küçük bir değişikliğin düzenli sistemi karmaşık (kaotik) bir sisteme dönüştürebileceğini ve aksinin de olabileceğini görüyoruz. Bu anlayışla doğaya farklı bir gözle bakıp, kaostan kozmosun ve kozmostan kaosun kolaylıkla doğabileceğini seziyoruz.