Konu: **Bilim**
Yazı: **37**

Sihirli Pascal Üçgeni

Doç. Dr. Haluk Berkmen

Blaise Pascal (1623-1662) matematik ve geometri konularında deha denecek bir yetenek sahibi idi. Pascal Olasılık hesabının kurucusu sayılır. Olasılık konusunu öylesine ciddiye almıştır ki Allah'ın varlığını dahi olasılık mantığıyla şu şekilde yorumlamıştır:

> "Allah ya vardır ya da yoktur. Hangi olasılığın doğru olduğunu aklımızla saptayamayız. Ama, bu iki olasılıktan birini seçersek yaşamımız etkilenebilir. Eğer Allah'ın var olduğunu seçersek sonsuz hayata ve mutluluğa ulaşma şansımız olabilir. Bu seçenek daha ahlaklı bir yaşam tarzına yol açabilir. Allah olmasa da bu seçeneğin bize zararı yoktur ve hatalı seçim yapmış olsak bile herhangi bir kaybımız olmaz. Şu halde Allah'ın varlığını seçmemizde yarar vardır."

Pascal üçgeni olarak bilinen sayı dizisi olasılık hesabının temelinde yer alır. Sonsuz büyüklükte bir satranç tahtanız olsun. Aynı renkli karelere 1'den başlayarak alttaki şekilde görüldüğü gibi, yan kenarları 1'lerden oluşan bir üçgen oluşturalım. Alt satırlarda her sayı üstteki iki aynı renkli sayının toplamı olmak şartıyla kutuları dolduralım. Bu yapıya **Pascal Üçgeni** denir.

0									1									1	2^0
1								1		1								2	2^1
2							1		2		1							4	2^2
3						1		3		3		1						8	2^3
4					1		4		6		4		1					16	2^4
5				1		5		10		10		5		1				32	2^5
6			1		6		15		20		15		6		1			64	2^6
7		1		7		21		35		35		21		7		1		128	2^7
8	1		8		28		56		70		56		28		8		1	256	2^8

Dokuz satırdan oluşan bu örnek sonsuza kadar genişletilebilir. Satırlardaki sayıların toplamını sağda görüyoruz. Her toplam 2'nin kuvveti olarak (en sağdaki sütun) ifade edilebilir. Bu diziyi n=0,1,2,...şeklinde tam sayılarla 2^n olarak kısaca yazabiliriz. Ayrıca her satırdaki sayı dizisi **$(x+y)^n=0$** denkleminin açılımındaki katsayılar olmaktadırlar. Örneğin:

$(x+y)^0=1$, $(x+y)^1=x+y$, $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$, ...

açılımlarına bakarsak katsayıların 1, 1-1, 1-2-1, 1-3-3-1 şeklinde Pascal üçgenindeki satırların sayılarına tümüyle uyduklarını görürüz. Bu tür bir diziye **Binom Serisi** deniyor. Binom serisini farklı bir şekilde belirtmek de mümkündür.

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r . y^{n-r}$$

$$n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)....(n-n) \qquad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Yukarıdaki matematik ifade şeklini n=3 için açalım.

$$(x+y)^3=(3!/0!.3!)x^0y^3+(3!/1!.2!)x^1y^2+(3!/2!.1!)x^2y^1+(3!/3!.0!)x^3y^0$$

veya kısaltıldığında **$(x+y)^3= y^3+3xy^2+3x^2y+x^3$** şeklinde yukarıdaki açılım bulunur.

$\binom{n}{r}$ Şekline **n'nin r'lik kombinasyonu** da denir. Kombinasyonu parantez içinde belirtmek yerine daha kolay olan **(n,r)** şeklinde belirtirsek Pascal üçgenindeki sayılar tam bir seri şeklini alır. Altta Pascal üçgeninin n,r kombinasyonlu durumu görülüyor.

0									0,0									1
1								1,0		1,1								2
2							2,0		2,1		2,2							4
3						3,0		3,1		3,2		3,3						8
4					4,0		4,1		4,2		4,3		4,4					16
5				5,0		5,1		5,2		5,3		5,4		5,5				32
6			6,0		6,1		6,2		6,3		6,4		6,5		6,6			64
7		7,0		7,1		7,2		7,3		7,4		7,5		7,6		7,7		128
8	8,0		8,1		8,2		8,3		8,4		8,5		8,6		8,7		8,8	256

n'nin **r**'lik kombinasyonu şu şekilde de yorumlanabilir: Elimizde n tane boş kutu ve r tane top olsun. Acaba bu r topu n kutu içine kaç değişik şekilde dağıtabiliriz? Örneğin iki kutu ve bir top varsa iki olanağımız bulunur. Topu ya birinci kutuya veya ikinci kutuya koyabiliriz. Bu iki durumu da **(1,0)** ve **(0,1)** olarak belirtebiliriz. Fakat **(0,1) = (1,1) = 1** olduğundan üstteki şeklin solunda bulunan kırmızı 1 satırındaki (1,0) ve (1,1) durumu oluşur. En genel durumda (n,0) = n!/0!(n-0)!= (n,n) = n!/n!(n-n)! = 1 olduğundan üçgenin iki eğik kenarındaki sayıların 1 oldukları sonucuna varıyoruz.

Bir diğer örnekte 4 kutumuzun ve 2 topumuzun olduğu durumları hesaplayarsak kırmızı 4 satırındaki (4,0)=1, (4,1)=4, (4,2)=6, (4,3)=4, (4,4)=1 dağılımlarını elde ederiz. Böylece her (n,r) kombinasyonunun bir **bağımsız dağılımın elemanı** olduğu anlaşılıyor. Çünkü kutulara yerleştirdiğimiz topları her seferinde çıkarıp yeniden dağıtıyoruz. Her dağıtım diğerinden bağımsız oluyor. Bağımsız durumların dizisine **Binom Dağılımı** da denir.

Pascal üçgenindeki sayıların olasılık kuramıyla yakın ilişkeleri var. Her satır belli sayıda nesnenin sonlu dağılımını veriyor. **Olasılık** kavramını: "kapalı bir sistemde oluşması beklenen bir sonucun tüm mümkün sonuçlara oranı" olarak tanımlayabiliriz. Eğer tüm mümkün sonuçları 100'de 100 olarak tanımlarsak belirli bir sonuç 100'de şu kadar olarak hesaplanabilir. Bir örnek olarak seçmeli sınava giren bir öğrencinin soruları ezbere, hesaplamadan ve hatta *hiç okumadan*, işaretlemesi durumunda % 50 doğru yanıta tesadüfen ulaşma olasılılığını hesaplayalım.

Basit olsun diye 8 soru ve her sorunun 4 seçeneği olsun. Acaba her sorudaki bir şıkkı ezbere işaretlerse 4 doğru cevaba ulaşması olasılığı nedir? Herhangi bir soruda doğru şıkkı işaretlemesi olasılığı ¼ veya x = 0.25 dir. Yanlış şıkkı işaretlemesi olasılığı ¾ yani y = 0.75 dir. Başka bir olanak olmadığından iki olasılığın toplamı %100 yani x+y =1 olur. 8 soruyu 8 boş kutu ve 4 doğru yanıtı 4 adet top olarak düşünürsek, 4 topu 8 kutuya (8,4) farklı şekilde dağıtabiliriz. 8'in 4'lük kombinasyonlarının, üstteki iki Pascal üçgenine bakarak, 70 olduğunu buluruz. r = 4, n = 8, x =0.25 ve y = 0.75 olduğuna göre, 8 sorudan 4ünü doğru bilme olasılığına P(8;4) dersek:

$$\mathbf{P(n;r) = (n,r).x^r y^{n-r}} = (8,4).(0.25)^4.(0.75)^4 = 70*0.0039*0.3164 = 0.0865$$

Bu olasılığın % 8.6 olduğunu görürüz. Eğer soru sayısı artarsa olasılık hızla düşer ve tesadüfen sorulardan yarısını doğru yanıtlamanın mümkün olmadığı anlaşılır. Bir diğer örnekte bir parayı 5 kere havaya atsam 3 kere yazı gelmesinin olasılığını hesaplayalım.

$$P(5;3) = (5,3).(1/2)^3.(1/2)^2 = 10*(1/8)*(1/4) = 10/32 = 0.3125 \text{ buluruz.}$$

Pascal üçgenini Binom açılımından kombinasyon dağılımına, olasılık hesabından istatistiğe kadar kullanıyorsak, bu üçgenin "*sihirli*" güçler içerdiğini iddia edebiliriz.

$(x+y)^{10}$ = 0 Binom dağılımının 2^{10} = 1024 katsayılarının grafik görüntüsü alttadır.